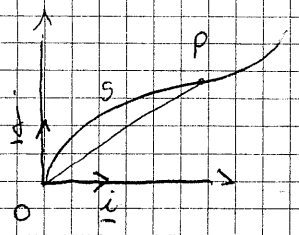
ESEMPI ED ESERCIZI DALLE LEZIONI

RAGGI DI CURVATURA - $\underline{T}$ - $\underline{N}$

* Curva Piana

- Trovare il raggio di curvatura di una curva piana $y = \hat{y}(x)$.



$$\rho - O = x\,\underline{i} + \underbrace{\hat{y}(x)}_{y}\,\underline{j}$$

$d\underline{\rho}$ = segmento

ds = arco di curva

Dalle formule di Frenet-Serret sappiamo che $\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\underline{N}$. Ci serve ρ. Troviamo quanto è $\underline{T}$:

$$\underline{T} = \frac{d\underline{\rho}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Sappiamo dalla teoria che $ds^2 = d\rho^2$, quindi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 1 + \hat{y}'^2(x) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \hat{y}'^2(x)}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{y}'^2(x)}}$$

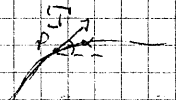
Scriviamo $\underline{T} = \frac{d\underline{\rho}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \left(\underline{i} + \hat{y}'(x)\,\underline{j}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{y}'^2(x)}}$

Quindi $\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\underline{T}}{ds}\right| = \frac{|y''(x)|}{\sqrt{(1 + \hat{y}'^2(x))^3}} \Rightarrow$

$$\boxed{\rho = \frac{\sqrt{(1 + \hat{y}'^2(x))^3}}{|y''(x)|}}$$

- Dimostrare che il raggio di curvatura r coincide con il raggio della circonferenza di una circonferenza osculatrice

α = angolo di inclinazione di $\underline{T}$ rispetto a $\underline{i}$



$\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\underline{N}$ considero $\underline{T} = \underline{T}(\alpha(s)) = \cos\alpha\,\underline{i} + \sin\alpha\,\underline{j}$

$$\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \left(-\sin\alpha\,\underline{i} + \cos\alpha\,\underline{j}\right)\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\underline{T}}{ds}\right| = \left|-\sin\alpha\,\underline{i} + \cos\alpha\,\underline{j}\right| \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = 1\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \quad (1)$$

Vogliamo conoscere $\left|\frac{dx}{ds}\right|$. Dalla figura si ha $tg\alpha = \hat{y}'(x)$, quindi possiamo esprimere α in funzione di s:

$$\frac{d}{ds} tg\alpha = \frac{d}{ds} \hat{y}'(s).$$

Ora:

$$\frac{d\,\hat{y}'(x(s))}{ds} = \frac{dy'}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = \hat{y}'' \frac{dx}{ds} = \frac{\hat{y}''(s)}{\sqrt{1+\hat{y}'(s)^2}} \quad (2)$$

Sviluppo separatamente primo e secondo membro ed eguaglio.

$$\hat{y}'(x) = tg\alpha$$

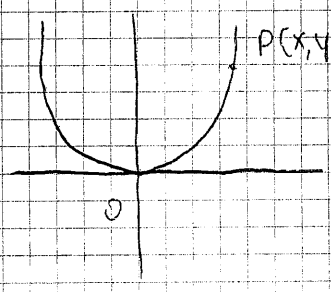
$$\frac{d}{ds}\hat{y}'(x) = \frac{d}{ds} tg\alpha = \frac{d\,tg\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \left(1+tg^2\alpha\right)\frac{d\alpha}{ds} =$$

$$= \left(1+\hat{y}'^2\right)\frac{d\alpha}{ds} \quad (3)$$

Uguaglio (2) e (3):

$$\frac{|\hat{y}''|}{(1+\hat{y}'^2)^{3/2}} = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$

* **Parabola**



$$y = ax^2$$

$$P-O = x\,\underline{i} + \overbrace{ax^2}^{y}\,\underline{j}$$

P dipende solo da x dato che $y = ax^2$ (è in funzione di x)

- <u>Trovare la lunghezza della parabola dal punto (0,0) al punto (1,1)</u>

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} ds \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dp^2 = \left[\left(\underline{i} + 2ax\,\underline{j}\right)dx\right]^2 = \left(1+4a^2x^2\right)dx^2$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$$

Abbiamo messo come estremi di integrazione $x=0$ e $x=1$ perché y dipende da x

- Trovare il raggio di curvatura.

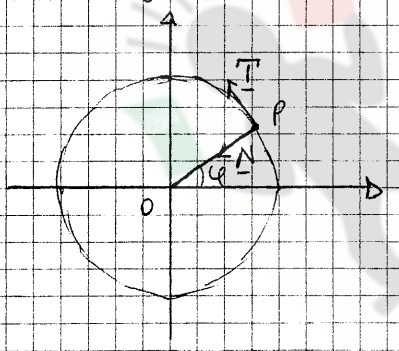
Utilizzo le formule di F-S.

$$\underline{T} = \frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{\underline{i}+2ax\underline{j}}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\hat{y}''}{(1+\hat{y}'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{\sqrt{(1+4a^2x^2)^3}} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2a}}$$

VALE PER TUTTE LE CURVE PIANE

★ Circonferenza



$$P-O = x\underline{i}+y\underline{j} = R(\cos\varphi\,\underline{i}+\operatorname{sen}\varphi\,\underline{j})$$

con $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$

- Trovare il raggio di curvatura

$$\underline{T} = \frac{dP}{ds} = R(-\operatorname{sen}\varphi\,\underline{i}+\cos\varphi\,\underline{j}) \quad \text{con } ds = R\,d\varphi$$

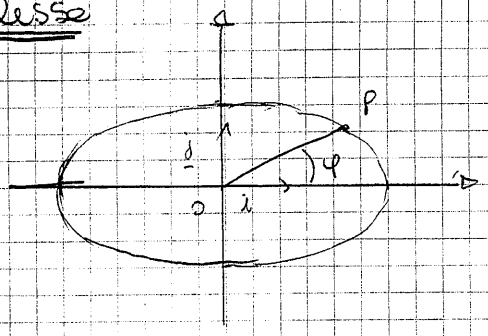
$$\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \underbrace{(-\cos\varphi\,\underline{i}+\operatorname{sen}\varphi\,\underline{j})}_{\underline{N}}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\left|\frac{d\underline{T}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{\rho = R}$$

OSSERVAZIONE: $ds^2 = dP^2 = \left(\frac{dP}{d\varphi}\cdot d\varphi\right)^2 = \left(R(-\operatorname{sen}\varphi\,\underline{i}+\cos\varphi\,\underline{j})\cdot d\varphi\right)^2 =$

$= R^2 d\varphi^2$

★ Ellisse



$(P-O) = a\cos\varphi\, \underline{i} + b\,\mathrm{sen}\varphi\, \underline{j}$

con $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$

- Trovare $\rho(0)$ e $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\underline{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

$$\rho = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} \Rightarrow \boxed{\rho(0) = b} \quad \text{e} \quad \boxed{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = a}$$

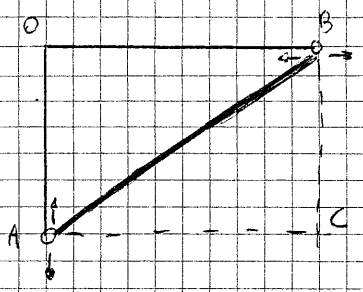
- Trovare $\underline{T}$ ed $\underline{N}$:

$$\underline{T} = \frac{d\underline{P}}{ds} = \frac{d\underline{P}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{-a\,\mathrm{sen}\varphi\, \underline{i} + b\cos\varphi\, \underline{j}}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

$$\underline{N} = \rho\,\frac{d\underline{T}}{ds} = \rho\,\frac{d\underline{T}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\underline{T}}{d\varphi}$$ (basta calcolare la derivata!)

CENTRI ISTANTANEI DEL MOTO - VEL. ANGOLARI

* Esercizio



$\bar{AB}$ sbarra vincolata.
A può scorrere lungo la verticale e B lungo l'orizzontale

Troviamo il centro istantaneo del moto.

$\bar{AB} = \ell$

Dalla formula fondamentale della cinematica, prendiamo O come punto e C come centro istantaneo del moto:

$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (P-C) + \underline{v}_C$ con $\underline{v}_C = 0$ $\forall P \in$ corpo rigido

$\underline{v}_P$ varia linearmente con la distanza $(P-C)$

Il centro istantaneo del moto si trova sull'ortogonale a $\underline{v}_P$ ed è prop. alla distanza $\bar{PC}$ (che è $\perp$ a $\underline{v}_P$)

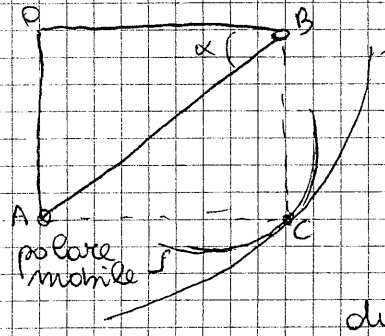
Vediamo la velocità negli estremi:
$\underline{v}_A$ ha direzione verticale e $\underline{v}_B$ solo orizzontale, quindi le due direzioni $\perp$ a $\bar{OA}$ e $\bar{OB}$ sono proprio $\bar{BC}$ e $\bar{AC}$ che confermano in C il centro istantaneo del moto.

- Che traiettoria descrive C rispetto ad un osservatore fisso ed uno mobile?

Il punto C rispetto all'osservatore fisso descrive un arco di circonferenza di raggio ℓ (diagonale del rettangolo)

Rispetto ad un osservatore mobile il punto C descrive sempre un arco di circonferenza, ma di raggio $\ell/2$.

Due aredi sono tangenti e uno rotola senza strisciare sull'altro



Se l'osservatore è solidale con l'asta, cioè fisso rispetto alla terna solidale con il corpo e posto nell'origine di tale sistema, esprime rotolamento piano e le coordinate di C assumono la forma:

$$\begin{cases} y_1^C = -R\sin\alpha \\ y_2^C = -R\cos\alpha \end{cases}$$

con la condizione $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v_0 = -R\dot{\alpha}(t) \\ \text{che si ottiene da } \underline{v}_P = \dot{x}\underline{k}_1 \end{cases}$ $(O-C) = -\dot{x}\underline{k}_1 R\underline{i}_2 = -R\alpha\underline{i}_2$